Муниципальное бюджетное образовательное учреждение

средняя образовательная школа №1 имени генерал- лейтенанта Б.П. Юркова

г.Зверева Ростовской области.

 «Решение уравнения sin x + cos x = 1 различными способами»

Работа учителя математики Куца Фёдора Ивановича

 Содержание работы:

1) Метод дополнительного угла.

2) Использование универсальной тригонометрической подстановки:

3) Сведение к однородному уравнению.

4) Преобразование суммы в произведение.

5) Возведение обеих частей уравнения в квадрат.

6) Применение формул двойного и половинного аргумента.

7) Применение основного тригонометрического тождества.

8) Разложение на множители.

9)Графическое решение уравнения.

**1) Метод дополнительного угла.**

Обе части уравнения делятся на выражение $\sqrt{a^{2}+b^{2}}$, вводится дополнительный угол

Пример. sin x + cos x = 1.

a = 1, b = 1

$\sqrt{a^{2}+b^{2}}$ = $\sqrt{1+1} $= $\sqrt{2}$.

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ sin x + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cos x = $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ sin x + $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cos x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$1)$ cos$ \frac{π}{4} $sinx + sin$ \frac{π}{4} $cosx = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, sin(x + $\frac{π}{4}$) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

x +$ \frac{π}{4}$ = (- 1)n arcsin $\frac{\sqrt{2}}{2}$ + π n, x +$ \frac{π}{4}$ = (- 1)n $\frac{π}{4} $+ π n,

x = -$ \frac{π}{4}$ + (- 1)n $\frac{π}{4} $+ π n,n є Z .

**Ответ. x = -**$ \frac{π}{4}$ **+ (- 1)n** $\frac{π}{4} $**+ πn, n є Z.**

Или 2)$ $ sin$ \frac{π}{4} $sinx + cos$ \frac{π}{4} $cosx = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, cos(x - $\frac{π}{4}$) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

x -$ \frac{π}{4}$ = ±arccos $\frac{\sqrt{2}}{2}$ + 2π n, x -$ \frac{π}{4}$ = ±$\frac{π}{4} $+ 2π n,

x =$ \frac{π}{4}$ ±$\frac{π}{4} $+ 2π n,

**Ответ. x =** $ \frac{π}{4}$ **±**$\frac{π}{4} $**+ 2πn, n є Z.**

**2) Использование универсальной тригонометрической подстановки:**

sin x = $\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+ tg^{2}\frac{x}{2}}$, cos x =$ \frac{1- tg^{2}\frac{x}{2}}{1+ tg^{2}\frac{x}{2}}$

Пример. sin x + cos x = 1.

$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+ tg^{2}\frac{x}{2}}$ +$ \frac{1- tg^{2}\frac{x}{2}}{1+ tg^{2}\frac{x}{2}}$ = 1, $ 2tg\frac{x}{2}$ + $1- tg^{2}\frac{x}{2} $ = $1+ tg^{2}\frac{x}{2}$,

$2tg^{2}\frac{x}{2}$ - $2tg\frac{x}{2}$ = 0, $2tg\frac{x}{2}$ ($tg\frac{x}{2}$ - 1) = 0.

$2tg\frac{x}{2}$ = 0 или$ tg\frac{x}{2}$ - 1 = 0.

1) $tg\frac{x}{2} $= 0, $\frac{x}{2}$ = πn, x = 2πn, n є Z.

2)$ tg\frac{x}{2}$ = 1, $\frac{x}{2}$ = $\frac{π}{4}$ + πk, x = $\frac{π}{2}$ + 2πk, k є Z.

**Ответ. x = 2πn, n є Z; x =** $\frac{π}{2}$ **+ 2πk, k є Z.**

**3) Сведение к однородному уравнению.**

Пример. sinx + cosx = 1.

Используя формулы sinx = 2sin$\frac{x}{2}$cos$\frac{x}{2}$, cosx = cos2 $\frac{x}{2}$ - sin2$ \frac{x}{2}$

и записывая правую часть уравнения в виде 1= cos2$ \frac{x}{2}$ + sin2$ \frac{x}{2}$, получаем:

2sin$\frac{x}{2}$cos$\frac{x}{2}$ + cos2$ \frac{x}{2}$ - sin2$ \frac{x}{2}$ = cos2$ \frac{x}{2}$ + sin2$ \frac{x}{2}$.

2 sin2$ \frac{x}{2}$ - 2sin$\frac{x}{2}$cos$\frac{x}{2}$ = 0.

Вынеся 2sin$\frac{x}{2} $за скобки, получим равносильное уравнение

2 sin$\frac{x}{2}$(sin$ \frac{x}{2}$ - cos$\frac{x}{2})$ = 0.

Откуда 2sin$\frac{x}{2}$ = 0 или sin$ \frac{x}{2}$ – cos$\frac{x}{2}=0.$

1) sin$\frac{x}{2}$ = 0. $\frac{х}{2 }$ = $ π$n, x = 2πn, n є Z;

 2) sin$ \frac{x}{2}$ - cos$\frac{x}{2}$ = 0, sin$ \frac{x}{2}$ = cos$\frac{x}{2}$,

tg $\frac{х}{2 }$ = 1. $ \frac{х}{2 }$ = $\frac{π}{4}$ +$ π$n $π$, х = $\frac{π}{2 }$ + 2$π$n, n є Z.

**Ответ. x = 2πn, x =** $\frac{π}{2}$ **+ 2πn, n є Z;**

**4)Преобразование суммы в произведение.**

Пример. sin x + cos x = 1.

Выразим cos x через sinx, используя формулы приведения: cos x = sin ($\frac{π}{2}$ - x).

sin x + sin ($ \frac{π}{2}$ - x) = 1; 2 sin$\frac{ x+ \frac{π}{2} - x}{2} $cos $\frac{x- \frac{π}{2}+ x}{2}$ = 1; 2 sin $\frac{π}{4}$ cos (x - $\frac{π}{4}$) = 1;

2∙$ \frac{\sqrt{2}}{2}$ ∙ cos (x - $\frac{π}{4}$) = 1; cos (x - $\frac{π}{4}$) =$ \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

x - $\frac{π}{4}$ = ± arccos$ \frac{\sqrt{2}}{2}$ +2$π$n, x = $\frac{π}{4}$ ± $\frac{π}{4}$ +2$π$n.

x = 2$π$n, х = $\frac{π}{2 }$ + 2$π$n, n є Z.

**Ответ. x = 2πn, x =** $\frac{π}{2}$ **+ 2πn, n є Z.**

**5) Возведение обеих частей уравнения в квадрат.**

Пример. sin x + cos x = 1.

(sin x + cos x )2 = 1; sin2 x + 2sin x cos x + cos x2 = 1; sin 2x + 1 = 1;

sin 2x = 0; 2x = πn; x = $\frac{πn}{2}$ , n є Z.

При возведении уравнения в квадрат получаем уравнение – следствие, поэтому проведем проверку.

Проверка. 1) При х = 2πn, n є Z, 0 + 1 = 1 верно,

х = 2πn, n є Z – корни уравнения.

2) При х = $\frac{π}{2}$ + 2πn, n є Z, 1+ 0 = 1 верно,

х = $\frac{π}{2}$ + 2πn, n є Z – корни уравнения.

3) При х = π + 2πn, n є Z, 0 - 1 = 1 неверно,

 х = π + 2πn, n є Z – не являются корнями уравнения.

4) При х = $\frac{3π}{2}$ + 2πn, n є Z, -1+ 0 = 1 неверно,

х = $\frac{3π}{2}$ + 2πn, n є Z – не являются корнями уравнения.

**Ответ. x = 2πn, x =** $\frac{π}{2}$ **+ 2πn, n є Z.**

**6) Применение формул двойного и половинного аргумента**.

Пример. sin x + cos x = 1.

Запишем уравнение в виде: sin x = 1 - cos x .

Сделаем замену: sin x = 2sin$\frac{x}{2}$cos$\frac{x}{2}$, 1 - cos x = 2sin2$ \frac{x}{2}$.

2sin$\frac{x}{2}$cos$\frac{x}{2}$ = 2sin2$ \frac{x}{2}$; 2sin$\frac{x}{2}$cos$\frac{x}{2}$ - 2sin2$ \frac{x}{2}$ = 0; 2sin$ \frac{x}{2}$(cos$\frac{x}{2}$ - sin$ \frac{x}{2}$) = 0;

2sin$ \frac{x}{2}$ = 0 или cos$\frac{x}{2}$ - sin$ \frac{x}{2}$ = 0.

1) 2sin$ \frac{x}{2}$ = 0; $\frac{x}{2}$ = πn; x = 2πn, n є Z.

2) cos$\frac{x}{2}$ = sin$ \frac{x}{2}$ ; $tg\frac{x}{2}$ = 1, $\frac{x}{2}$ = $\frac{π}{4}$ + πk; x = $\frac{π}{2}$ + 2πk, k є Z.

**Ответ. x = 2πn, n є Z; x =** $\frac{π}{2}$ **+ 2πk, k є Z.**

**7) Применение основного тригонометрического тождества.**

Пример. sin x + cos x = 1.

Из тождества sin2 x + cos2 x = 1 имеем cos2 x = 1 - sin2 x, откуда cosx = ±$ \sqrt{1-sin^{2}x}$.

sin x ±$ \sqrt{1-sin^{2}x}$ = 1; ±$ \sqrt{1-sin^{2}x}$ = 1 – sin x; 1 - sin2 x = (1 – sin x)2;

(1- sin x) (1 + sin x) - (1 – sin x)2 = 0; (1- sin x) (1 + sin x – 1 + sin x) = 0;

(1 - sin x) ∙ 2sin x = 0.

1 – sin x = 0 или 2 sin x = 0.

1) sin x = 1; x = $\frac{π}{2}$ + 2πk, k є Z.

2) sin x = 0; x = πn, n є Z.

Корни необходимо проверить.

При х = $\frac{π}{2}$ + 2πn, n є Z, 1+ 0 = 1 верно, х = $\frac{π}{2}$ + 2πn, n є Z – корни уравнения.

При х = 2πn, n є Z, 0 + 1 = 1 верно, х = 2πn, n є Z – корни уравнения.

При х = π + 2πn, n є Z, 0 - 1 = 1 неверно, х = π + 2πn, n є Z – не являются корнями уравнения.

**Ответ. x = 2πn, n є Z; x =** $\frac{π}{2}$ **+ 2πk, k є Z.**

 **8) Разложение на множители.**

Запишем уравнение в виде: sin x + cos x -1 = 0.

sin x - (1 - cos x) =0

2sin$\frac{x}{2}$cos$\frac{x}{2}$ - 2sin2$ \frac{x}{2}$ = 0; 2sin$ \frac{x}{2}$ (cos$\frac{x}{2}$ - sin$ \frac{x}{2}$) = 0;

2sin$ \frac{x}{2}$ = 0 или cos$\frac{x}{2}$ - sin$ \frac{x}{2}$ = 0.

1) 2sin$ \frac{x}{2}$ = 0; $\frac{x}{2}$ = πn; x = 2πn, n є Z.

2) cos$\frac{x}{2}$ = sin$ \frac{x}{2}$ ; $tg\frac{x}{2}$ = 1, $\frac{x}{2}$ = $\frac{π}{4}$ + πk; x = $\frac{π}{2}$ + 2πk, k є Z.

**Ответ. x = 2πn, n є Z; x =** $\frac{π}{2}$ **+ 2πk, k є Z.**

**9)Графическое решение уравнения.**

 Перепишем уравнение в виде: sin x = 1 - cos x.

 Построим в одной системе координат графики функций: у = sin x , y =1 - cos x.



Из графика видно, что уравнение имеет 2 решения: x = 2πn, n є Z; x = $\frac{π}{2}$ + 2πk, k є Z. (Необходимо обязательно проверять это вычислениями).

**Ответ. x = 2πn, n є Z; x =** $\frac{π}{2}$ **+ 2πk, k є Z.**

Литература.

[studyport.ru](http://studyport.ru/)›[tochnyie-nauki…**grafik**ov-v…**uravneniy**](http://studyport.ru/tochnyie-nauki/primenenie-grafikov-v-reshenii-uravneniy)