

Уравнения и неравенства с параметрами как способ формирования исследовательских навыков учащихся в курсе алгебры 7-9 класса

И. М. Шумская

ГОУ ЛНР «Кировская многопрофильная
гимназия»,

г. Кировск

sergej_92@mail.ru

Аннотация. В последние годы задачи с параметрами (и прежде всего уравнения и неравенства с одним параметром) регулярно встречаются в вариантах ГИА, олимпиадах, ЕГЭ. И здесь далеко не все школьники приступают к решению этих заданий, и еще меньшее число – выполняют решение верно. Таким образом, очевидна необходимость отработки в школьном курсе математики приемов решения различных задач с параметрами.

Ключевые слова: исследование, неравенства, параметры, решение задач, школьный курс.

Актуальность проблемы. Решение уравнений и неравенств, содержащих параметр, является, пожалуй, одним из самых трудных разделов элементарной математики. Это связано с тем, что в школе стараются развить умения и навыки решения определенного набора стандартных задач, связанных часто с техникой алгебраических преобразований. Задачи с параметром относятся к другому типу. Для их решения обычно требуются гибкость мышления, логика в рассуждениях, умение хорошо и полно анализировать ситуацию. Опыт показывает, что учащиеся, владеющие методами решения задач с параметром, успешно справляются и с другими задачами.

Цель статьи. Привести примеры решения задач с параметрами, показав собственный опыт формирования у учащихся умений, навыков и математической компетентности при решении задач с параметрами.

Впервые знакомиться с параметрами полезно в 7-м классе при изучении линейных уравнений, чтобы ученики привыкли к понятию «параметр» и не испытывали затруднений при изучении этой темы в старших классах.

Прежде чем ввести понятие «параметр» ученикам необходимо напомнить роль буквы в алгебре и предложить задания в которых надо выразить одну переменную через другую.

Задание: Выразите x через другие переменные:

$$1) y = \frac{2a}{3x-1} - 2b; 2) y = \left(\frac{5}{bx-c} - 9d \right) \cdot 13a; 3) y + 3k = \frac{2x+3}{8} 15c;$$

Пример 1. Решите уравнение $x + 2 = a + 7$ относительно x .

Переменную, которую надо найти, будем называть неизвестной, а переменную, через которую будем выражать искомую неизвестную, назовем параметром.

Решить уравнение с параметром – это значит для каждого значения параметра найти значение неизвестной переменной, удовлетворяющее этому уравнению.

$$x + 2 = a + 7; x = 5 + a$$

Значение x находится по формуле $x = 5 + a$, подставляя в нее задаваемые значения параметра a . Заметим, что значения параметра a задаем произвольно.

В нашем примере: при $a = 3$ $x = 8$; при $a = 0$ $x = 5$; при $a = -4$ $x = 1$.

Ответ запишем так: при любом значении параметра a $x = 5 + a$.

Параллельно решаем задачу, обратную данной.

Пример 2. При каком значении параметра a $x = 2,5$ является корнем уравнения $x + 2 = a + 7$?

Решение.

Т.к. $x = 2,5$ корень уравнения $x + 2 = a + 7$, то при подстановке $x = 2,5$ в уравнение получим верное равенство: $2,5 + 2 = a + 7$

$$a = -2,5$$

Ответ: при $a = -2,5$.

В 7 классе начинаем обращать внимание учеников на запись ответа.

1) при $a \dots$ $x \dots$

2) если $a \dots$, то $x \dots$

Когда начинать решать такие уравнения? В зависимости от уровня класса, на уроках в течение всего года.

Решение квадратных и дробно-рациональных уравнений, содержащих параметры – один из труднейших разделов школьной математики. Квадратные и дробно-рациональные уравнения с параметрами – это тема, на которой проверяется подлинное понимание учащимися изученного материала.

Что должны знать восьмиклассники?

Если $D > 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D = 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$.

Если $D < 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней

Пример 3. При каких значениях параметра b уравнение $bx^2 - bx + b = 0$

а) имеет корни; б) не имеет корней?

Решение. $bx^2 - bx + b = 0$; $D = -3b^2$;

а) $-3b^2 \geq 0$; $b^2 \leq 0$, следовательно $b = 0$. Если $b = 0$, то уравнение корни имеет.

б) $-3b^2 < 0$; $b^2 > 0$, – при любых значениях b , кроме нуля. Если $b \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, то исходное уравнение корней не имеет.

Уже в 8 классе можно решать квадратные уравнения, содержащие параметр, с ограничением на корни.

К этой группе задач примыкают задачи, содержащие параметр, решаемые с использованием теоремы Виета.

Пример 4. При каких значениях параметра b уравнение

$$(b - 1)x^2 - 2bx + b + 1 = 0 \text{ имеет:}$$

а) два положительных корня; б) два отрицательных корня; в) единственный корень?

Решение.

Если $b \neq 1$, то $x^2 - \frac{2b}{b-1}x + \frac{b+1}{b-1} = 0$;

а) согласно теореме Виета $\begin{cases} \frac{b+1}{b-1} > 0 \\ \frac{b-1}{2b} > 0 \end{cases}$, $b \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

б) $\begin{cases} \frac{b+1}{b-1} > 0 \\ \frac{b-1}{2b} < 0 \end{cases}$, решений нет

в) если $b = 1$, то $-2x + 2 = 0$; $x = 1$; $b \neq 1$; $D = 4b^2 - 4(b^2 - 1) = 4b^2 - 4b^2 + 4 = 4 \neq 0$.

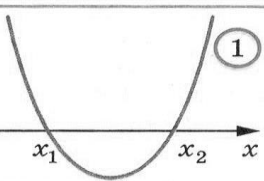
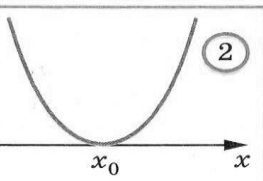
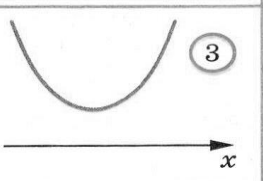
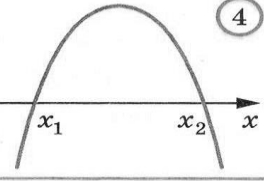
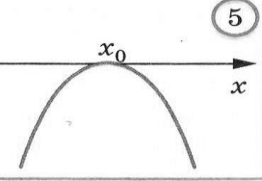
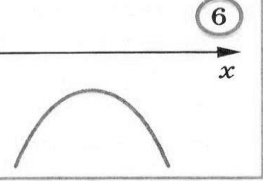
Ответ: а) $b \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; б) таких b не существует; в) $x = 1$.

В 9 классе рассматриваем задания, которые связаны с решением квадратичных неравенств, уравнений на расположение корней квадратного уравнения, графическим методом решения уравнений с параметрами, в том числе, уравнений с модулями.

Для решения **квадратных неравенств с параметрами** следует добиться осмысленного усвоения алгоритма решения квадратичных неравенств вида $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$. Наглядной «помощницей» может быть таблица.

Пример 5. Найдите число решений уравнения $|x^2 - 2x - 3| = a$ в зависимости от параметра a .

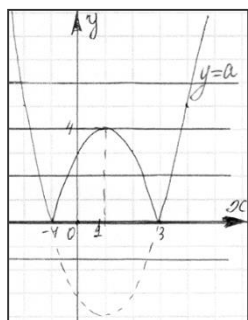
Решение.

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$	 ①	 ②	 ③
$a < 0$	 ④	 ⑤	 ⑥

Построим график функции $y = |x^2 - 2x - 3|$.

Выделим полный квадрат $|x^2 - 2x - 3| = (x - 1)^2 - 4$

Уравнение $|x^2 - 2x - 3| = a$ имеет столько решений, сколько раз прямая $y = a$ пересекает график функции $y = |x^2 - 2x - 3|$. На рисунке видно:



1) если $a < 0$, то графики не имеют общих точек, т.е. нет решения;

2) если $a = 0$, то графики имеют две общие точки, т.е. два решения;

3) если $0 < a < 4$, то графики пересекаются в четырёх точках – что даёт четыре решения;

4) если $a = 4$, то графики имеют три общие точки, т.е. три решения;

5) если $a > 4$, то графики имеют две общие точки, т.е. два решения.

Использование в школьном курсе задач с параметрами способствует выполнению основной задачи математического образования: научить учащихся учиться, причем не только в школе, а и всю жизнь, сформировать математические компетентности, которые являются основой интеллектуальных компетентностей личности, социально-трудовые, коммуникативные и информационные компетентности. Помогает достигнуть цели школьного образования, а именно, дать возможность учиться для формирования компетентностей личности.

Список использованных источников

1. Горнштейн П.Н., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. – М.: Илекса, 1998. – 336 с.
2. Кожухов С. К. Уравнения и неравенства с параметрами. Учебное пособие. – Орел, 2013. – 72 с.
3. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Алгебра 8. – Харьков: Гимназия, 2008. – 368 с.
9. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Алгебра 9. - Харьков: Гимназия, 2009. – 382 с.